Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

Другий день

11 клас

11–5. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, P – довільна точка на цій основі, T – проекція P на BC. У якому відношенні симедіана ΔPBC, що проведена з вершини C, ділить відрізок AT? *Симедіаною* ΔPBC називається такий відрізок CS, $S \in BP$, що промінь CS є симетричним променю медіани CF відносно променю бісектриси CL.

11–6. Паліндромом називається число, у якого запис цифр симетричний відносно середини, наприклад 7, 1221 та 57575 – паліндроми, а 1212 та 3330 – ні. Доведіть, що для будь-якої кількості попарно різних паліндромів сума обернених до них чисел не перевищує 11.

11–7. Для деяких цілих невід'ємних m, n рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=\frac{577}{408}$ має нескінченно багато розв'язків в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_l}=\frac{577}{408}$ має розв'язок в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$ для деяких цілих невід'ємних $k < m$ та $l < n$.

11–8. В вершинах правильного n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 6$ з центром у точці O, треба розставити натуральні числа a_1, a_2, …, a_n, не усі однакові, таким чином, щоб для кожної вершини A_i існували дві вершини A_k та A_l, що симетричні відносно прямої OA_i, для яких справджується рівність: $a_i = \frac{1}{2}(a_k + a_l)$.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~18 березня~~ 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів