

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада
найкращих юних математиків України**

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:*

Другий день

9 клас

9–5. Для натуральних чисел $a \geq b \geq c \geq d$ доведіть нерівність:

$$ab + bc + cd - b^2 - c^2 - d^2 \geq a - d.$$

9–6. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром у точці O . На променях AB , AD , CB та CD відклали рівні відрізки AA_1 , AA_2 , CC_1 та CC_2 , довжина яких більша за довжину будь-якої зі сторін чотирикутника $ABCD$. Виявилось, що точки A_1 , A_2 , C_1 та C_2 лежать на одному колі з центром у точці O . Доведіть, що прямі A_1A_2 , C_1C_2 та BD перетинаються в одній точці або паралельні.

9–7. Є 4 країни, в кожній з яких є декілька міст. Між містами будь-яких двох різних країн прокладено не менше ніж $\frac{5}{6}$ від загальної можливої кількості доріг між цими країнами. Доведіть, що з кожної країни можна вибрати по місту так, що між будь-якими двома містами з цих чотирьох прокладена дорога. Між будь-якими двома містами можна прокласти не більше однієї дороги.

9–8. Чи існують множини з попарно різних натуральних чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , $n > 1$, для яких справджується умова:

$$(a_1 + 1)! + (a_2 + 1)! + \dots + (a_n + 1)! : a_1! + a_2! + \dots + a_n!.$$

Миколаїв Київ, 18 березня 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада
найкращих юних математиків України**

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:*

Другий день

9 клас

9–5. Для натуральних чисел $a \geq b \geq c \geq d$ доведіть нерівність:

$$ab + bc + cd - b^2 - c^2 - d^2 \geq a - d.$$

9–6. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром у точці O . На променях AB , AD , CB та CD відклали рівні відрізки AA_1 , AA_2 , CC_1 та CC_2 , довжина яких більша за довжину будь-якої зі сторін чотирикутника $ABCD$. Виявилось, що точки A_1 , A_2 , C_1 та C_2 лежать на одному колі з центром у точці O . Доведіть, що прямі A_1A_2 , C_1C_2 та BD перетинаються в одній точці або паралельні.

9–7. Є 4 країни, в кожній з яких є декілька міст. Між містами будь-яких двох різних країн прокладено не менше ніж $\frac{5}{6}$ від загальної можливої кількості доріг між цими країнами. Доведіть, що з кожної країни можна вибрати по місту так, що між будь-якими двома містами з цих чотирьох прокладена дорога. Між будь-якими двома містами можна прокласти не більше однієї дороги.

9–8. Чи існують множини з попарно різних натуральних чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , $n > 1$, для яких справджується умова:

$$(a_1 + 1)! + (a_2 + 1)! + \dots + (a_n + 1)! : a_1! + a_2! + \dots + a_n!.$$

Миколаїв Київ, 18 березня 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів