

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада
найкращих юних математиків України**

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

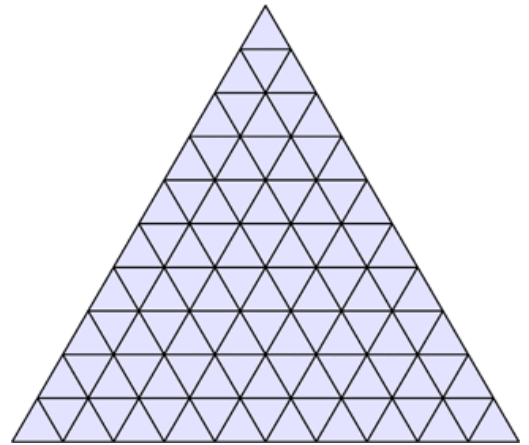
*"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі*

Перший день

10 клас

10–1. Для яких натуральних чисел n число $n^n + 1$ ділиться націло на число $n + 1$?

10–2. Рівносторонній трикутник зі стороною довжиною n поділений на n^2 маленьких рівносторонніх трикутників зі стороною довжини 1 (рис.). З самого початку один з них, що не має спільних точок з зовнішніми сторонами великого трикутника, пофарбували у синій колір, а решту – у жовтий. За один хід можна вибрати будь-який з n^2 маленьких трикутників і поміняти його колір та кольори сусідніх з ним по стороні трикутників. Чи можна за декілька ходів зробити усю дошку однокольоровою?



10–3. Нехай H_a, H_b, H_c – основи висот, що опущені з відповідних вершин трикутника ABC , H – ортоцентр цього трикутника, а K – точка, що симетрична H відносно прямої BC . Пряма, що проходить через точку H паралельно прямій H_aH_b , перетинає прямі AC та AB у точках X та Y . Доведіть, що описані кола $\triangle ABC$ та $\triangle XYK$ дотикаються.

10–4. Для дійсних чисел a, b, c, d , що задовольняють умову $a + b + c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, доведіть нерівність: $(2 - a)(2 - b)(2 - c)(2 - d) \geq 1$.

Миколаїв Київ, 17 березня 20 липня 2020 р.