

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада
найкращих юних математиків України**

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі*

Перший день

11 клас

11–1. Нехай $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ – деякі натуральні числа. Для кожного a_i Заріна виписала в зошит усі натуральні дільники a_i (деякі числа можуть повторюватися). Далі Маруся розбила усі виписані Заріною числа на декілька груп. Виявилось, що числа в кожній з груп утворюють повний набір дільників деякого числа, які Маруся вирішила потім виписати на дошку. Доведіть, що на дошці виписані числа a_1, a_2, \dots, a_k .

11–2. У школі кожен учень дружить не більше ніж з n учнями цієї школи. Натуральні числа a та b такі, що $a + b = n - 1$. Доведіть, що учнів можна розділити на дві групи A і B таким чином, що кожен учень групи A має не більше ніж a друзів серед учнів групи A , а кожен учень групи B має не більше ніж b друзів серед учнів групи B .

11–3. Знайдіть усі функції $f : R \rightarrow R$, для яких для довільних дійсних $x, y \in R$ справджується рівність:

$$(x + y)f(x + y) = (f(f(x) + f(y)))^2.$$

11–4. Нехай ABC гострокутний не рівнобедрений трикутник. Його бісектриси AL_1 та BL_2 перетинаються в точці I . Точки D та E вибираються на відрізках AL_1 та BL_2 відповідно таким чином, що $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle A$ та $\angle EAC = \frac{1}{2} \angle B$. Прямі AE та BD перетинаються в точці P . Точка K – симетрична точці I відносно прямої DE . Доведіть, що прямі KP та DE перетинаються на описаному колі $\triangle ABC$.

Миколаїв Київ, 17-березня 20 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів