Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

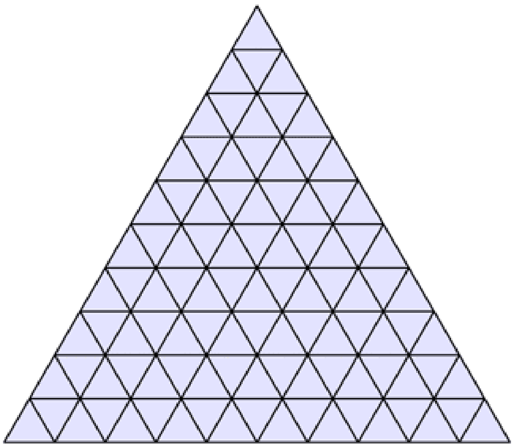
"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі

Перший день

9 клас

9–1. Яку найбільшу кількість чисел можна вибрати серед чисел $1, 2, \ldots, 2n$ так, щоб довільні два з них мали спільний дільник, більший за 1?

9–2. Рівносторонній трикутник зі стороною довжиною n поділений на n^2 маленьких рівносторонніх трикутників зі стороною довжини 1 (рис.). З самого початку один з них, що не має спільних точок з зовнішніми сторонами великого трикутника, пофарбували у синій колір, а решту – у жовтий. За один хід можна вибрати будь-який з n^2 маленьких трикутників і поміняти його колір та кольори сусідніх з ним по стороні трикутників (з синього на жовтий і навпаки). Чи можна за декілька ходів зробити усю дошку однокольоровою?



9–3. Доведіть, що для будь-якого натурального $n > 1$ існує послідовність натуральних чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m = n$, $m > 1$ така, що

$$5(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2) - 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{m-1}a_m) \le 4n^2 + \tfrac{1}{2}(m+1).$$

9–4. У трикутнику ABC ортоцентр H – це середина висоти AD, O – центр описаного кола ΔABC. Пряма, що проходить через точку H перпендикулярно до прямої HO перетинає сторони AB та AC ΔABC у точках P та Q відповідно. Доведіть, що середини відрізків BP, CQ та точка O лежать на одній прямій.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~17 березня~~ 20 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів