

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада
найкращих юних математиків України**

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:*

Другий день

8 клас

8–5. Нехай a, b, c – довільні ненульові числа. Визначимо такі величини: $A = \frac{a^2+b^2}{c^2}$, $B = \frac{b^2+c^2}{a^2}$, $C = \frac{c^2+a^2}{b^2}$, а також $P = A \cdot B \cdot C$ та $S = A + B + C$. Які значення може приймати вираз $P - S$?

8–6. На площині вибрані $2n$ точок. Доведіть, що можна розбити їх на n пар таким чином, щоб виконувалась наступна умова: якщо на двох точках з кожної пари побудувати круг, як на діаметрі, то в отриманих n кругів буде деяка спільна точка, не обов'язково серед вибраних.

8–7. Пару натуральних чисел (a, b) назовемо *цікавою*, якщо існує таке натуральне n , що мінімальний простий дільник числа $a + n$ дорівнює максимальному простому дільнику числа $b + n$. Знайдіть усі цікаві пари натуральних чисел.

8–8. На дошці, що складається з 2020×2020 комірок (клітин), Андрій та Олеся грають у гру за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає «фінальну комірку», після цього Андрій вибирає «початкову комірку», що не має спільних точок з фінальною. Далі Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій з обраної ним початкової комірки) фарбують комірки дошки в блакитний (Андрій) та жовтий (Олеся) кольори за такими правилами. Кожний своїм черговим ходом має фарбувати клітину, що має спільну сторону чи вершину із клітиною зафарбованою супротивником на попередньому ході і яка не була раніше зафарбована в жодний з кольорів. Перемагає той, хто зафарбує своїм ходом фінальну комірку, або якщо виникне ситуація, за якої супротивник не може зробити за правилами черговий хід.

а) Які комірки може вибрати Олеся в якості фінальних, щоб напевно перемогти, не залежно від того, яку комірку в якості початкової обере Андрій?

б) Для яких комірок, які може вибрати Олеся в якості фінальних, у Андрія існує можливість вибрати початкову комірку таким чином, щоб перемоги самому?

Миколаїв Київ, 18-березня 21 липня 2020 р.