

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада
найкращих юних математиків України**

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі*

Перший день

8 клас

8–1. Яку найменшу кількість чисел можна викреслити серед перших 100 натуральних чисел, щоб добуток решти чисел не ділився націло на 250?

8–2. Вісім незнайомих один з одним дітей прийшли на перше заняття з танців. Щоб вони якнайшвидше познайомилися, вчителька вирішила по черзі вибирати деяких чотирьох з них, які під мелодію водитимуть хоровод протягом хвилини. За цю хвилину кожна дитина в хороводі знайомиться з тими двома, з якими тримається за руку. Яка найменша кількість часу (хвилин) знадобиться вчительці, щоб познайомити один з одним усіх 8 дітей?

8–3. а) Відомо, що для ненульових цілих чисел a, b, c справджується

умова: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$. Чи обов'язково має справджуватися

рівність: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$?

б) Розглянемо усі трійки ненульових цілих чисел (a, b, c) , кожне з яких знаходиться в межах від -2020 до 2020 включно. З'ясуйте, для скількох з

них умови $a + b + c = 0$ та $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ рівносильні, тобто для скількох таких трійок чисел (a, b, c) ці твердження справджуються чи не справджуються одночасно?

8–4. В трикутнику ABC $\angle A = 75^\circ$ та $\angle C = 45^\circ$. На сторонах AB та BC вибрали точки P та T відповідно так, що чотирикутник $APTC$ вписаний і $CT = 2AP$. Точка O – центр описаного кола $\triangle ABC$. Промінь TO перетинає сторону AC у точці K . Доведіть, що $TO = OK$.

Миколаїв Київ, 17 березня 20 липня 2020 р.