Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

1 тур

20 березня 2018 року

«Давно відомо, що 20% людей
виконують 80% роботи.
Нещодавно з'ясувалося, що 80% людей
вважають, що вони входять у ці 20%.».
Фольклор

м. Одеса

8 клас

8–1. Відомо, що для деякого значення a справджується рівність: $a^4 - \dfrac{1}{a^2} = 4$. Чи може бути цілим число $x = a^4 + \dfrac{1}{a^2}$?

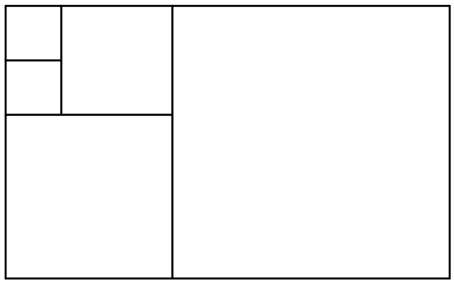

Рис. 1

Відповідь: не може.

Розв'язання. Якщо додати ці дві рівності, то матимемо рівність $4 + x = 2a^4$, якщо відняти, то $x - 4 = \frac{2}{a^2}$. Далі маємо, що $(x+4)(x-4)^2 = \frac{4}{a^4} \cdot 2a^4 = 8$. Оскільки нас цікавлять цілі значення x, то кожний з виразів $x + 4$ та $x - 4$ має бути цілим. Оскільки ці два числа однакової парності та $(x-4)^2$ -- квадрат цілого числа, то мають виконуватись рівності $x + 4 = 2$ та $(x-4)^2 = 4$. Але одночасно це неможливо. Таким чином, шуканого значення x не існує.

8–2. Чи існує прямокутник, який можна розрізати на 5 квадратів, серед яких два однакові, а усі інші – попарно різні та відмінні від однакових, при цьому однакові квадрати є

а) найменшими з усіх;

б) найбільшими з усіх?

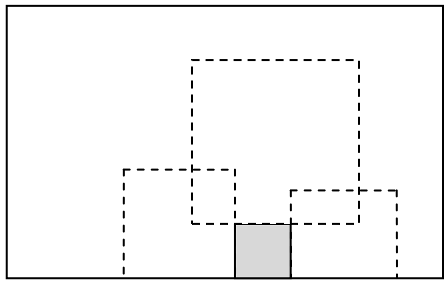

Рис. 2

Відповідь: ***а)*** так, ***б)*** ні.

Розв'язання. ***а)*** Наведемо відповідний приклад (рис. 1).

б) Розглянемо квадрат найменшого розміру. Він не може бути на межі прямокутника (рис. 2), так само не може бути всередині межі одного з інших квадратів. Тобто можливе лише таке розташування інших чотирьох квадратів навколо найменшого (рис. 3). Але тоді, якщо AB – сторона найбільшого квадрату, тоді щоб точка B не була вершиною зовнішнього прямокутника, то вона має потрапити всередину сторони, але тоді має бути квадрат зі стороною $CB > AB$ – одержана суперечність завершує доведення.

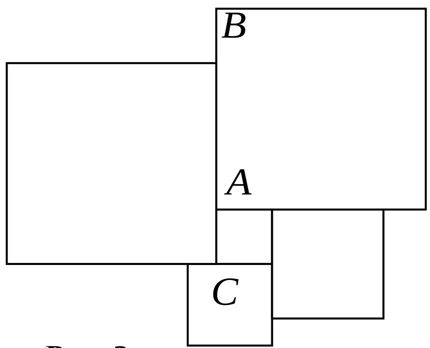

Рис. 3

8–3. Знайдіть найбільше трицифрове число n, для якого виконується така умова: існує рівно 16 пар натуральних чисел (a, b), де $a < b$, для яких n є найменшим спільним кратним.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 992.

Розв'язання. Спочатку припустимо, що число $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, де p_i, $i = \overline{1, k}$ -- попарно різні прости числа та m_i – натуральні, $i = \overline{1, k}$. Тоді випишемо всі упорядковані пари чисел (a, b), для яких $[a, b] = n$. Тут немає умови $a < b$, тому пари (a, b) та (b, a) при $a \neq b$ вважаються різними. Якщо $a = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ та $b = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, то для виконання умови $[a, b]=n$ необхідно та достатньо, щоб $\forall i=\overline{1, k}\ \max\{a_i, b_i\}=m_i$. Тоді можливі варіанти пар (a_i, b_i):

$$(0, m_i), (1, m_i), \ldots, (m_i-1, m_i), (m_i, m_i), (m_i, m_i-1), (m_i, m_i-2), \ldots, (m_i, 0).$$

Усього тут $2m_i+1$ варіантів. Таким чином, усього таких упорядкованих пар чисел буде рівно $N=(2m_1+1)\ldots(2m_k+1)$. А шуканих пар, для яких $a<b$, буде рівно $\frac{1}{2}(N-1)$. Дійсно, з усіх обчислених пар треба прибрати пару (n, n), а також з кожних двох пар (a, b) та (b, a) треба залишити одну. Таким чином, треба знайти найбільше трицифрове натуральне число, для якого $\frac{1}{2}(N-1)=16$. Тоді $N=33$, тому можливі два варіанти: $N=2\cdot16+1$ або $N=(2\cdot5+1)(2\cdot1+1)$. У першому випадку для деякого простого p виконується умова $n=p^{16}\geq 2^{16}>999$. У другому випадку отримуємо, що $n=p^5q$, де p, q -- різні прості числа. Оскільки $5^5>999$, то $p=2$ або $p=3$.

Для $p=3$ маємо, що $3^5=243$, тому шуканим числом може стати лише $3^5\cdot 2=486$, оскільки вже $3^5\cdot5>999$. Для $p=2$ маємо, що $2^5=32$, тому шуканим числом може стати максимальне трицифрове число вигляду: $2^5\cdot p$, де $p>2$ -- просте. Оскільки $1000:2^5=31{,}25$, то неважко зрозуміти, що шуканим є число $2^5\cdot31=992$.

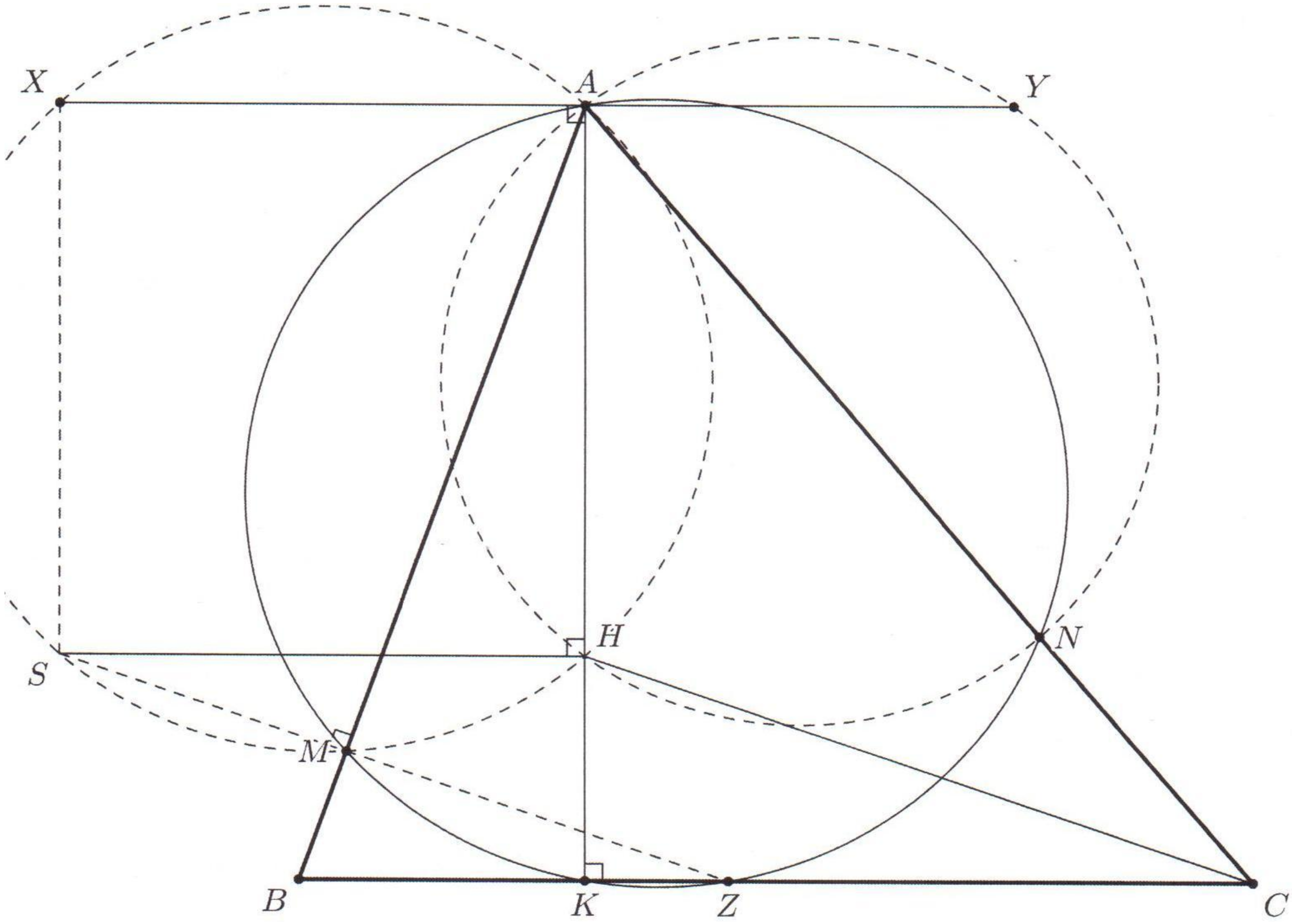

Рис. 4

8–4. У трикутнику ABC відмічено ортоцентр H і проведено висоту AK. Коло w проходить через точки A і K та перетинає сторони AB і AC в точках M та N відповідно. Пряма, що проходить через точку A паралельно BC, вдруге перетинає описані кола трикутників AHM і AHN в точках X і Y відповідно. Доведіть, що $XY=BC$.

(Данило Хілько)

Розв'язання. Нехай Z – друга точка перетину кола w з прямою BC, тоді AZ – діаметр w (рис. 4). Дійсно, якщо $K = Z$, то w дотикається до BC, тому, оскільки $AK \perp BC$, то центр w належить AK. Якщо $K \neq Z$, то $\angle AKZ = 90°$ і AZ – діаметр w. Тоді $\angle AMZ = 90°$. Нехай пряма MZ вдруге перетинає описане коло ΔXAH в точці S ,тоді $\angle AMS = 90°$. Також $\angle SHA = \angle SMA$, тому $SH \perp AH$. Звідси $AX \| SH \| BC$, також звідси випливає, що $XAHS$ – прямокутник. Отже, $AX = SH$. Також зауважимо, що $CH \perp AB$. Крім цього, $ZM \perp AB$. Тому $HC \| SZ$. Тоді $SHCZ$ – паралелограм, а тому $SH = ZC$. Тоді $AX = SZ$. Аналогічно, $AY = BZ$, звідси $XY = BC$.

9 клас

9–1. В олімпіаді взяли участь 60 учасників. Їм було запропоновано 8 задач, кожна з яких оцінювалась від 0 до 7 балів. Доведіть, що у підсумку обов'язково буде 3 учасники, чиї резільтати попарно відрізняються не більше ніж у 1 бал. Чи справджувалось би твердження задачі, якби в олімпіаді взяли участь 58 учасників?
Результат учасника на олімпіаді – це загальна кількість набраних ним балів.

Відповідь: не справджувалось би.
Розв'язання. Мінімальна кількість балів, яку можна було набрати 0, максимальна – 56. Розглянемо такі проміжки в балах: $[0;1]$, $[2;3]$, $[4;5]$, …, $[54;55]$ та 56 балів. Якщо хоч в один з цих проміжків потрапляє принаймні 3 учні, то твердження доведене. Якщо це не так, то у кожному з цих проміжків не більше двох учнів. Усього проміжків 29, тому в олімпіаді мали взяти участь не більше 58 школярів. Одержана суперечність завершує доведення першої частини.

Тепер про другу частину. Якщо рівно по 2 учасники набрали по 0, 2, 4, …, 56 балів. То немає трьох, різниця чиїх результатів не перевищує 1 бал. І усього учасників рівно 58.

9–2. Андрій за квітень прочитав товсту книгу. Він читав книгу за таким графіком: з 1 по 20 квітня він прочитував в середньому по 20 сторінок в день, з 6 по 25 квітня він прочитував в середньому по 30 сторінок в день, а з 11 по 30 квітня він прочитував в середньому по 40 сторінок в день. Яку максимальну та мінімильну кількість сторінок могла мати ця книга?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $S_{\max} = 1200$, $S_{\min} = 800$.
Розв'язання. Розіб'ємо квітень на 5 проміжків. Нехай з 1 по 5 квітня він прочитував в середньому по x сторінок, з 6 по 10 квітня – в середньому по a сторінок, з 11 по 20 квітня – в середньому по c сторінок, з 21 по 25 квітня – в середньому по b сторінок, з 26 по 30 квітня – в середньому по y сторінок.
Тоді справджуються такі рівності:

$$\tfrac{5x+5a+10c}{20} = 20,\ \tfrac{5a+10c+5b}{20} = 30,\ \tfrac{10c+5b+5y}{20} = 40, \text{ або}$$

$$x + a + 2c = 80,\ a + 2c + b = 120,\ 2c + b + y = 160.$$

Загальна кількість сторінок, що прочитав Андрій, визначається як сума:

$$S = 5x + 5a + 10c + 5b + 5y = 5(x + a + 2c + b + y) =$$

$$\text{o} = 5((x + a + 2c) + (2c + b + y) - 2c) = 5(240 - 2c).$$

Таким чином, максимальна кількість сторінок у книги буде, коли значення $2c$ буде найменшим, і відповідно мінімальна кількість сторінок, коли $2c$ буде найбільшим.

Випадок максимального S, або мінімального $2c$. Оскільки $c \ge 0$, то спробуємо підібрати можливі значення змінних для $c = 0$. Тоді маємо умови:

$$x + a = 80,\ a + b = 120,\ b + y = 160.$$

Один з можливих варіантів, при $a = 0$, тоді $x = 80$, $b = 120$ та $y = 40$. Тоді максимальна кількість строрінок дорівнює $S_{\max} = 1200$.

Випадок мінімального S, або максимального $2c$. Оскільки $x + a + 2c = 80$, то $2c \le 80$. Спробуємо підібрати можливі значення змінних для $c = 40$. Тоді маємо умови:

$$x + a = 0,\ a + b = 40,\ b + y = 80.$$

Один з можливих варіантів, при $a = x = 0$, тоді $b = y = 40$. Тоді мінімальна кількість строрінок дорівнює $S_{\min} = 800$.

9–3. У гострокутному трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає описане навколо цього трикутника коло в точці W. З точки W на пряму AB опустили перпендикуляр WU, а з центра вписаного кола I цього ж трикутника опустили перпендикуляр IP на пряму WU. Нехай M – середина відрізка BC. Доведіть, що пряма MP проходить через середину відрізка CI.

(Микола Мороз)

Розв'язання. Помітимо, що прямокутні трикутники BMW та IPW рівні за гіпотенузою та гострим кутом ($IW = BW$ за теоремою про трилисник (рис. 5), $\angle WIP = \angle MBW = \frac{1}{2}\angle A$). Отже, $WP = MW$. Оскільки точки U, B, M, W лежать на колі з діаметром BW, то

$$\angle(MW, WU) = \angle(MB, BU) = \angle(CB, BA).$$

Нескладно зрозуміти, що тоді $\angle MWP = \angle ABC$. Оскільки ΔMWP – рівнобедрений, то

$$\angle WMP = \tfrac{1}{2}(90^\circ - \angle B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle B.$$

Тому $\angle PMB = \frac{1}{2}\angle B$. Звідси легко бачити, що $PM \parallel BI$. Нехай F – точка перетину CI та PM. Тоді в ΔBIC відрізок MF паралельний до сторони BI та проходить через середину M сторони BC. Звідси випливає, що MF – середня лінія ΔBIC, а отже F – середина відрізка CI.

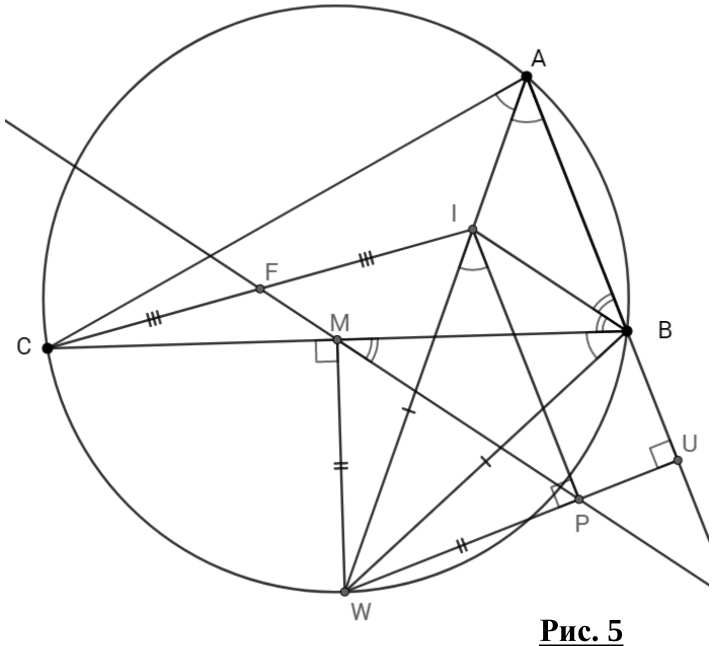

Рис. 5

9–4. Дільники складеного натурального числа n, яке не є квадратом простого числа,позначимо в порядку зростання таким чином: $1 < d_1 < d_2 < \ldots < d_{l-1} < d_l < n$, $l \ge 2$. Для яких n існують натуральні числа a, b та N, що задовольняють такі умови: $d_1 + d_2 = N^a$ та $d_{l-1} + d_l = N^b$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: n – усі числа, що мають рівно 4 дільники, тобто числа типу $n = pq$, де p, q – прості числа, або $n = p^3$, де p – просте, а також числа типу $n = 2 \cdot p \cdot (p+2)^{b-1}$, де $p,\ p+2$ – прості числа, b – натуральне.

Розв'язання. Зауважимо, що з умов задачі випливає, що $d_1 \cdot d_l = d_2 \cdot d_{l-1} = n$. Використовуючи цю рівність та першу рівність з умови, можемо переписати другу рівність умови таким чином:

$$N^b = d_{l-1} + d_l = \frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_1} = \frac{n(d_1+d_2)}{d_1 d_2} = \frac{nN^a}{d_1 d_2} \text{ або } n = d_1 d_2 N^{b-a}.$$

Крім того, якщо $b = a$, то $d_1 + d_2 = N^a = N^b = d_{l-1} + d_l$ звідки $d_1 = d_{l-1}; d_2 = d_l$. Тому шукане число має усього чотири дільники, або рівно два власні дільники. Таких чисел два типи: $n = pq$, де p, q -- прості числа, або $n = p^3$, де p -- просте. Тому в подальшому можемо розглядати лише випадок $b > a$.

Розглянемо два випадки.

1. Нехай N – непарне число. Тоді з рівності $d_1 + d_2 = N^a$ маємо, що сума $d_1 + d_2$ – непарне число, тому серед цих дільників рівно один парний, інший – непарний. Звідси очевидно, що $d_1 = 2$, бо це є найменший парний дільник. Тоді $d_2 = N^a - 2$ має бути простим числом. Нехай $d_2 = N^a - 2 = p$, тоді $N^a = p + 2$. Таким чином, $n = 2 \cdot p \cdot N^{b-a}$.

а) Якщо N – не просте число, то оскільки $N \le p + 2$, то воно має простий дільник $q \le p + 2$. Очевидно, що $q \ne p$, а тому $q < p$. Але це означає, що при $b > a$ число $n = 2 \cdot p \cdot N^{b-a}$ ділиться на $q < p = d_2$, а тому число p не може бути d_2. Одержали суперечність.

б) Якщо N – просте число, то при $a > 1$ матимемо, що з рівності $N^a = p + 2$ випливає, що $N < p + 2$, то воно є власним дільником числа n, меншим від p, що неможливо. Таким чином, $a = 1$, тобто числа p та $N = p + 2$ - пара простих чисел-близнюків. І тоді $\forall b \ge 1$ матимемо, що число $n = 2 \cdot p \cdot (p+2)^{b-1}$ є розв'язком. Дійсно, $d_{l-1} = 2(p+2)^{b-1}$, $d_l = p(p+2)^{b-1}$ і $d_{l-1} + d_l = 2(p+2)^{b-1} + p(p+2)^{b-1} = (p+2)^b = N^b$.

2. Нехай N – парне число. Оскільки $n = d_1 d_2 N^{a-b}$, то n також парне, тобто $d_1 = 2$.

Тоді, оскільки $d_1 = 2$, то $d_2 = 4$, бо сума двох найменших дільників є парною. Тоді $N^a = 6$. Тому $N = 6$, $a = 1$, звідси $n = 2 \cdot 4 \cdot 6^{b-1}$. Якщо $b > a = 1$, то число 3 є дільником числа n, тому $d_2 = 3$ – суперечність. Звідси $b = a = 1$.

Підсумовуючи одержане, маємо наведену відповідь.

10 клас

10–1. Розв'яжіть в натуральних числах x, y, p, n, k систему рівнянь: $\begin{cases} 5x + y = p^k, \\ 5y + x = p^{k+n}. \end{cases}$

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $\forall k \ge 3$, $x = 2^{k-3}$, $y = 3 \cdot 2^{k-3}$, $p = 2$ та $n = 1$.

Розв'язання. Перше рівняння перепишемо у вигляді $25x + 5y = 5p^k$ і віднімемо від нього друге рівняння: $24x = p^k(5 - p^n)$. Звідси стає зрозумілим, що $5 - p^n > 0$, а тому маємо лише такі випадки.

Випадок 1. $p = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $5x + y \ge 6$, а тому розв'язків немає.

Випадок 2. $p=2$, $n=1$. Тоді маємо рівність $24x=2^k\cdot 3$ або $x=2^{k-3}$. Таким чином, $k\ge 3$. Тоді з першого рівняння $y=2^k-5\cdot 2^{k-3}=3\cdot 2^{k-3}$. Неважко переконатися, що ці величини задовольняють і другому рівнянню. Таким чином, для довільного $k\ge 3$розв'язком є такий набір чисел: $x=2^{k-3}$, $y=3\cdot 2^{k-3}$, $p=2$ та $n=1$.

Випадок 3. $p=2$, $n=2$ або $p=4$, $n=1$. Тоді маємо рівність $24x=2^k$ і тому розв'язків немає.

Випадок 4. $p=3$, $n=1$. Тоді маємо рівність $24x=3^k\cdot 2$ і тому розв'язків немає.

10–2. Дано рівнобедрений тупокутний трикутник ABC з вершиною у точці B. Серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає прямі AC і AB в точках K і M відповідно. Доведіть, що точка, симетрична точці A відносно прямої BK, лежить на прямій CM.

(Антон Тригуб)

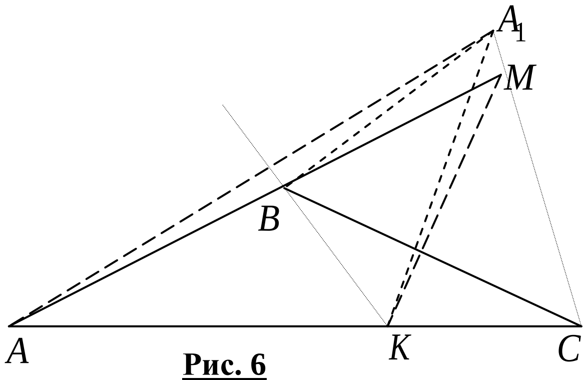

Рис. 6

Розв'язання. Нехай A_1– точка, що симетрична A відносно BK (рис. 6). Спершу, $\angle BA_1K=\angle BAK=\angle BCK$, звідки чотирикутник BA_1CK - вписаний. Тоді,

$$\angle A_1CB=\angle A_1KB=\angle AKB=2\angle BCA=\angle MBC=\angle MCB,$$

звідки отримуємо, що точки C, A_1, M лежать на одній прямій.

10–3. Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на $4n$ попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Андрій вибирає собі 1 шматочок, далі Олеся вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після її ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торту, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом Андрій забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торту, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Чи зможе хтосьгарантовано взяти собі більше половини від усього торта, якщо:

а) розрізання торту на сектори проводить Олеся;

б) розрізання торту на сектори проводить Андрій, але своїм першим ходом він не має права брати найбільший за вагою шматочок?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ***а), б)*** перемогу може забезпечити собі той, хто проводить розрізання.

Розв'язання. ***а)*** Покажемо як Олеся має розрізати торт, щоб перемогти. Позначимо вагу торту через M. Вона його розрізає на 3 сусідніх шматочки вагою $\frac{1}{3}M$ (важкі), а усі решта мають нульову вагу (легкі). Перенумеруємо шматочки за рухом годинникової стрілки $1; 2; \ldots; 4n$. Зрозуміло, що шматочок з номером $4n$ сусідній з 1. Нехай важкими є шматочки $4n-3$, $4n-2$ та $4n-1$. Андрій не може розпочати з жодного з 5 шматочків: $4n-4, \ldots, 4n$, бо інакше Олеся першим своїм ходом вибере 2 важких шматочки і набере разом $\frac{2}{3}M>\frac{1}{2}M$. Тому Андрій вибирає будь-який інший шматочок. Далі очевидно, що той, хто візьме принаймні один з двох шматочків $4n-4$ чи $4n$ (навіть, якщо разом з одним з важких шматочків), – програє, бо супротивник точно може після цього ходу взяти 2 важких шматочки та набрати більше половини торта.

Таким чином, Андрій та Олеся мають ходити в секторі між шматочками 1 та $4n-5$. Зрозуміло, що після Андрієвих ходів буде забрано $4n+1$ шматочок, а після Олесиних – $4n+3$. Таким чином, після заповнення повного сектору між шматочками 1 та $4n-5$ буде хід Андрія і тому він програє.

б) Покажемо як Андрій має розрізати торт, щоб перемогти. Знову перенумеруємо шматочки від 1 до $4n$. Зробимо знову 3 важкі шматочки вагою по $\frac{1}{3}M$, а решта – легкі нульової ваги. При цьому важкими робимо шматки 1, 3 та 5. Далі Андрій першим ходом бере шматочок 3, після чого другим ходом він так само може взяти ще один важкий шматочок і набирає разом $\frac{2}{3}M > \frac{1}{2}M$.

Залишається в точності задовольнити умови задачі. А саме – усі шматочки мають попарно різну ненульову вагу. Для цього у пункті ***а)*** малі шматочки зробимо, наприклад, вагою $\frac{i}{5(4n-3)(4n-2)}M$, $i=\overline{1;\,4n-3}$, тоді їх сума

$$\frac{1}{5(4n-3)(4n-2)}M+\frac{2}{5(4n-3)(4n-2)}M+\ldots+\frac{4n-3}{5(4n-3)(4n-2)}M=\frac{(4n-3)(4n-2)}{10(4n-3)(4n-2)}M=\frac{1}{10}M\,.$$

Великі шматочки виберемо вагою $\frac{29}{100}M$, $\frac{30}{100}M$ та $\frac{31}{100}M$. Порядок шматочків не відіграє ролі. Такий самий розподіл мас шматочків у пункті ***б)***, тільки з умовою, що 3-й шматочок має вагу $\frac{30}{100}M$.

10–4. Знайдіть усі функції $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, які для усіх невід'ємних x, y задовольняють рівності:

$$f(f(x)+f(y))=xyf(x+y)\,.$$

(Воронович Ігор)

Відповідь: $f(x)\equiv 0$.

Розв'язання. При $y=0$ з умови маємо, що $f\left(f(x)+f(0)\right)=0$ для довільного x, а отже існує таке a, що $f(a)=0$. Таким чином, при $x=a$, $f\left(f(0)\right)=0$. Далі, при $x=y=0$ випливає, що $f\left(2f(0)\right)=0$, а при $x=y=f(0)$ матимемо, що

$$f\left(f\left(f(0)\right)+f\left(f(0)\right)\right)=f^2(0)\,f\left(2f(0)\right)=0,$$

тобто $f(0)=0$ і $f\left(f(x)\right)=0$ для довільного x.

Підставимо $y=f(y)$ в умову, тоді

$$xf(y)\,f\left(x+f(y)\right)=f\left(f(x)+f\left(f(y)\right)\right)=f\left(f(x)\right)=0,$$

звідки $xf(y)\,f\left(x+f(y)\right)=0$ для довільних x та y.

Припустимо, що $f(y_0)\neq 0$ для деякого $y_0>0$. Підставимо $y=y_0-x$, тоді

$$f\left(f(x)+f(y_0-x)\right)=x(y_0-x)\,f(y_0).$$

Вираз у правій частині приймає довільне значення на відрізку $[0;\frac{1}{4}y_0^2f(y_0)]$, тому множина значень функції f включає цей відрізок. Звідси, існує деяке x_0 таке, що $f(x_0)=\min\{\frac{1}{2}y_0,\frac{1}{8}y_0^2f(y_0)\}$. З рівності $xf(y)\,f\left(x+f(y)\right)=0$ при $y=x_0$ і $x=y_0-f(x_0)>0$ маємо, що $f(x_0)\,f(y_0)=0$, що неможливо. Отримана суперечність доводить, що $f(x)=0$ для довільного $x\in[0,+\infty)$.

11 клас

11–1. Знайдіть усі трійки попарно різних натуральних чисел (a, b, c), які задовольняють умову: число $2a-1$ ділиться націло на b, число $2b-1$ ділиться націло на c і число $2c-1$ ділиться націло на a.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $(7, 13, 25)$, $(25, 7, 13)$ та $(13, 25, 7)$.

Розв'язання. Запишемо ці умови у вигляді такої системи: існують натуральні числа k, m, n, для яких справджуються рівності:

$$2a-1=kb,\ 2b-1=nc \text{ та } 2c-1=ma.$$

Очевидно, що усі числа k, m, n та a, b, c -- непарні.

тоді матимемо, що

$$b=\tfrac{2a-1}{k} \Rightarrow 2b-1=\tfrac{4a-2}{k}-1=nc \Rightarrow c=\tfrac{4a-2-k}{kn} \Rightarrow 2c-1=\tfrac{8a-4-2k}{kn}-1=ma \Rightarrow$$
$$8a-4-2k-kn=knma \Rightarrow a=\tfrac{4+2k+kn}{8-knm}.$$

Тепер зрозуміло, що має справджуватися нерівність: $knm<8$. Тому з симетричності умов та непарності чисел k, m, n випливає, що можливі варіанти (з точністю до циклічності) такі.

Варіант 1: $k=m=n=1$. Тоді матимемо, що $c=2b-1 \Rightarrow a=2c-1=4b-3 \Rightarrow b=2a-1=8b-7 \Rightarrow a=b=c=1$, але числа a, b, c повинні бути попарно різними.

Варіант 2: $k=3, m=n=1$. Тоді матимемо, що $c=2b-1 \Rightarrow a=2c-1=4b-3 \Rightarrow 3b=2a-1=8b-7 \Rightarrow 5b=7$ – суперечність, бо b – не ціле.

Варіант 3: $k=5, m=n=1$. Тоді матимемо, що $c=2b-1 \Rightarrow a=2c-1=4b-3 \Rightarrow 5b=2a-1=8b-7 \Rightarrow 3b=7$ – суперечність, бо b – не ціле.

Варіант 4: $k=7, m=n=1$. Тоді матимемо, що $c=2b-1 \Rightarrow a=2c-1=4b-3 \Rightarrow 7b=2a-1=8b-7 \Rightarrow b=7 \Rightarrow c=13, a=25$ і ця трійка задовольняє умову.

11–2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту AH і медіану AM. На прямих AB і AC взято точки X та Y відповідно так, що $AX=XC$ і $AY=YB$. Доведіть, що середина відрізка XY рівновіддалена від точок H і M.

(Данило Хілько)

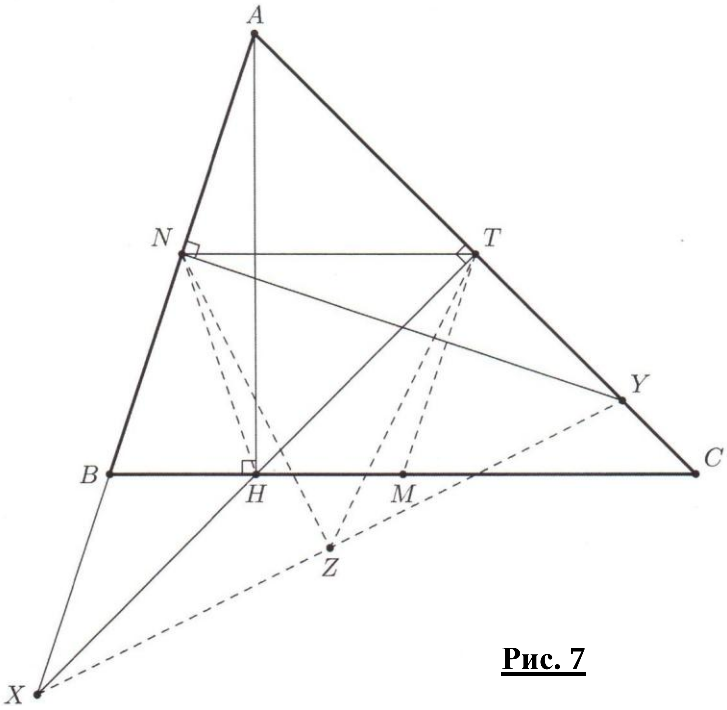

Рис. 7

Розв'язання. Нехай Z – середина відрізка XY, а N і T – середини відрізків AB і AC відповідно (рис. 7). Оскільки за умовою $AX=XC$, а $AY=BY$, XT і YN – серединні перпендикуляри до відрізків AC і AB. Тоді трикутники XTY і XNY прямокутні, тож $XZ=ZN=ZT=ZY$, бо медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині. Інакше кажучи, точка Z рівновіддалена від N і T. З іншої сторони, $NT \parallel BC$, бо NT – середня лінія ΔABC. MT також середня лінія ΔABC, тож $MT=\frac{1}{2}AB$. $NH=\frac{1}{2}AB$ як медіана, проведена до гіпотенузи в прямокутному трикутнику. Отже,

$HNTM$ – рівнобічна трапеція. Тоді у її основ спільний серединний перпендикуляр. Ми довели, що точка Z належить серединному перпендикуляру NT. Тоді вона належить серединному перпендикуляру HM.

11–3. Задача 10–4.

11–4. Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на $2n,\ n>1$ попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає собі 1 шматочок, далі Андрій вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після його ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торту, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом один з гравців забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торту, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Для яких n Олеся може так розрізати торт на шматочки, щоб виграти, якщо своїм першим ходом вона бере найменший шматочок?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: Олеся перемагає для усіх $n \notin \{2;\ 4\}$.

***Розв'язання*.** Розв'язувати будемо методом малих коливань. Якщо ми кажемо, що деякі шматочки s_1 та s_2 мають вагу 1 та 1, то це означає, що насправді їх ваги відрізняються від 1 на настільки мали величини ε_1 та ε_2, які не впливають на остаточний висновок розподілу ваг. Наприклад, $s_1=1+\varepsilon_1=1+10^{-10},\ s_2=1+\varepsilon_2=1-10^{-10}$. Сумарна вага торту M дорівнює сумі ваг усіх розглянутих шматочків. Перенумеруємо шматочки за рухом годинникової стрілки $0;1;2;\ldots;2n-1$, зрозуміло, що шматочок з $2n-1$ сусідній з 0. При цьому найменший за вагою шматочок має номер 0. Без обмеження загальності, можна вважати вагу цього шматочка рівним 0, зміст задачі не зміниться, якщо усі шматочки торту ми зменшимо на вагу найменшого.
Розглянемо, які значення може приймати n.

Якщо $n=2k+1>1$, то розглянемо такий розподіл ваг. Шматочки $n-1$, n та $n+1$ мають вагу 1, а інші – 0. Тоді після першого ходу Олесі Андрій не зможе взяти ненульові шматочки. Поки своїм ходом Андрій не візьме шматочок $n-2$ чи $n+2$, Олеся просто робить свій хід так, щоб сектор взятих шматочків був симетричній відносно сектору з номером 0. Якщо Андрій бере своїм ходом один з шматочків $n-2$ чи $n+2$, то який би інший шматочок він не взяв, Олеся зможе взяти два шматочки вагою 1 і переможе.

Якщо $n=2k>4$, то розглянемо такий розподіл ваг. Шматочки з номерами 2 та $2n-2$ мають вагу $\frac{99}{100}$, шматочки 3 та $2n-3$ мають вагу 1, шматочки з номерами 4 та $2n-4$ мають вагу $\frac{101}{100}$. Ці шість шматочків будемо називати *великими*. Усі інші шматочки мають вагу 0.
Якщо Андрій своїм першим ходом візьме шматочки нульової ваги 1 та $2n-1$, то Олеся далі вибере два великі шматочки з номерами 2 та 3. Після цього Андрій своїм ходом може взяти максимум ще два великі шматочки, а Олеся своїм ходом – ще два великі шматочки і переможе.
Таким чином, вважатимемо, що Андрій своїм першим ходом вибере шматочки 1 та 2 і матимемо сумарну вагу $\frac{99}{100}$. Після цього Олеся бере шматочки 3 та 4 і матимемо сумарну вагу $\frac{201}{100}$. Андрій жодним своїм ходом не може взяти шматочок $2n-1$, бо тоді Олеся візьме ще два великих шматочки і переможе. Тому Андрій примушений ходити в напрямі $4;5;6;\ldots$, Олеся так само бере по два

сусідніх в цьому напрямі. Очевидно, що нікому не вигідно брати шматочок з номером $2n-1$, бо тоді супротивник може взяти одразу два великих шматочки. Таким чином, вони братимуть нульові шматочки доти, доки не дійдуть до великих шматочків за номерами $2n-4$, $2n-3$ та $2n-2$. За порядком ходів Андрій бере великі шматочки з номерами $2n-3$ та $2n-2$. Олеся останнім своїм ходом забирає шматочок з номером $2n-1$, а передостаннім – два шматочки з номерами $2n-5$ та $2n-4$, останній з яких є великим. Сумарно маємо, що у Олесі буде вага шматочків $\frac{201}{100}+\frac{101}{100}=\frac{302}{100}$, а у Андрія – $\frac{99}{100}+\frac{199}{100}=\frac{298}{100}$. Таким чином, Олеся перемагає.

Якщо $n=2$, то очевидно, що своїм першим ходом Андрій вибере два найбільших шматочки та переможе.

Якщо $n=4$, то усього маємо $2n=8$ шматочків. Покажемо, що Андрій завжди переможе. Тут під числом, що означає номер шматочка будемо паралельно розуміти, що це і його вага при порівняннях. Позначимо через $(k-1, k, k+1)$ – найменший за вагою шматочок, що мають відповідні номери, $[k-1, k, k+1]$ – найбільший, а $\{k-1, k, k+1\}$ – середній.

Можемо вважати, що $1+2 \ge 6+7$. Нехай Андрій бере першим ходом $1+2$ і не перемагає. Це означає, що Олеся могла взяти набір $6+7$, $3+7$ або $3+4$ та перемогти. Розглянемо усі ці випадки.

Випадок $6+7$ очевидно приводить одразу до суперечності. Дійсно, оскільки $1+2 \ge 6+7$, а далі Андрій вибирає $[3, 4, 5]+\{3, 4, 5\}$, а Олесі дістанеться $(3, 4, 5)$, то очевидно, що Олеся програє.

Якщо перемогу приносить хід Олесі $3+7$, то це означає, що має місце нерівність:

$$3+7+(4, 5, 6) > \tfrac{1}{2}M > 1+2+[4, 5, 6]+\{4, 5, 6\}. \qquad \textbf{(1)}$$

Тоді Андрій своїм першим ходом бере не $1+2$, а $6+7$. Далі очевидно, що він зможе взяти наступним ходом пару шматочків, серед яких буде 3 (Олеся до нього точно не дотягнеться). Тоді Андрій матиме принаймні такий набір: $6+7+3+(2, 4)$. Оскільки

$$6+7+3+(2, 4) > 3+7+(4, 5, 6) > \tfrac{1}{2}M,$$

то Андрій перемагає.

Якщо перемогу приносить хід Олесі $3+4$, то це означає, що має місце нерівність:

$$3+4+(5, 6, 7) > \tfrac{1}{2}M > 1+2+[5, 6, 7]+\{5, 6, 7\}. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо Андрій першим ходом зіграє $6+7$, то Олеся не може взяти $1+2$ та $1+5$, бо тоді Андрій набере виграшну комбінацію $3+4+6+7 > 3+4+(5, 6, 7) > \frac{1}{2}M$. Таким чином, Олеся має виграти комбінацією $4+5$, а звідси має справджуватись така нерівність:

$$4+5+(1, 2, 3) > \tfrac{1}{2}M > 6+7+[1, 2, 3]+\{1, 2, 3\}. \qquad \textbf{(3)}$$

Якщо Андрій першим ходом зіграє $1+7$, то Олеся не може походити $5+6$ та $2+6$, бо тоді Андрій набере виграшну комбінацію $3+4+1+7 > 3+4+(5, 6, 7) > \frac{1}{2}M$. Таким чином, Олеся має виграти комбінацією $2+3$, а звідси має справджуватись така нерівність:

$$2+3+(4, 5, 6) > \tfrac{1}{2}M > 1+7+[4, 5, 6]+\{4, 5, 6\}. \qquad \textbf{(4)}$$

Якщо додати два останніх співвідношення, то отримаємо суперечність:

$$2+3+4+5+(1, 2, 3)+(4, 5, 6) > 1+6+7+7+[1, 2, 3]+\{1, 2, 3\}+[4, 5, 6]+\{4, 5, 6\},$$

оскільки $2+3 \le [1, 2, 3]+\{1, 2, 3\}$, $4+5 \le [4, 5, 6]+\{4, 5, 6\}$, $(1, 2, 3) \le 1$, $(4, 5, 6) \le 6$, $0 < 7+7$. Таким чином, у Андрія є виграшна стратегія, знаючи співвідношення ваг шматочків.