Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

IV етап Всеукраїнської
олімпіади з математики

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв’язань задач

2 тур

21 березня 2018 року

*«Правильне рішення, що прийняте
із запізненням, є помилкою.»
Лі Якокка*

м. Одеса

8 клас

8–5. Андрій та Олеся записали на дошці по натуральному числу. Виявилось, що число, записане Олесею, має суму цифр 2018 та має рівно на 1 цифру менше ніж число Андрія. Також відомо, що різниця записаних ними чисел дорівнює одноцифровому числу. Яким може бути число, що записав Андрій?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{225}}$, або $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{224}1}$.

Розв'язання. Неважко зрозуміти, що Андрієве число може бути лише таким $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{n}a}$, а Олесине – лише таким: $\overline{\underbrace{99\ldots9}_{n}b}$. Інакше різниця не буде одноцифровою. Дійсно, якщо у Олесі не усі цифри, окрім останньої, є 9, то при додаванні одноцифрового числа кількість розрядів не зміниться. Звідти так само випливає подання числа, що записав Андрій. Сума цифр Олесиного числа дорівнює 2018, тому воно має вигляд $\overline{\underbrace{99\ldots9}_{224}2}$ (оскільки $2018 = 224 \cdot 9 + 2$). Тому Андрієве число має мати останню цифру меншу за 2, бо інакше різниця записаних чисел буде не меншою за 10. Тому ця цифра може бути 0 чи 1. Звідси він записав або число $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{225}}$, або $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{224}1}$.

8–6. На сторонах AB, BC, AC трикутника ABC з $\angle BAC = 120°$ взято точки M, K, N відповідно так, що ΔMKN є правильним, а $AM = 2{,}017$, $AN = 2{,}018$. Барон Мюнхгаузен стверджує, що ΔMKN має найменший периметр серед усіх правильних трикутників, що мають рівно по одній вершині на кожній зі сторін ΔABC. Чи не помиляється барон?

(Рожкова Марія)

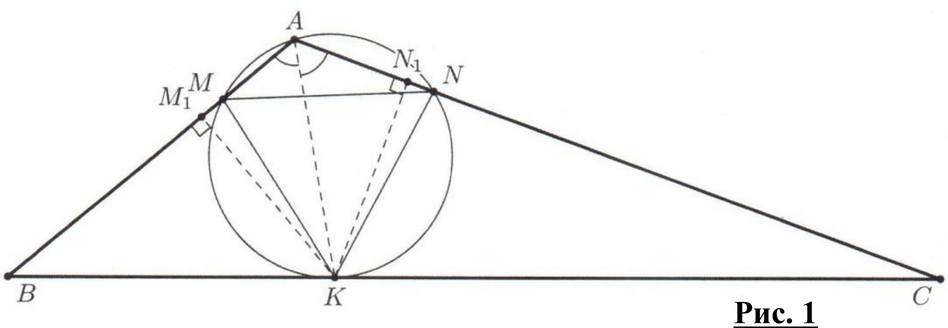

Рис. 1

Відповідь: барон Мюнхгаузен помиляється.

Розв'язання. За умовою всі кути ΔMKN рівні $60°$. Оскільки $\angle BAC + \angle MKN = 180°$, то чотирикутник $AMKN$ є вписаним, а отже

$$\angle KAC = \angle KMN = 60° = \angle MNK = \angle BAK.$$

Розглянемо точки M_1 і N_1 – проекції точки K на сторони AB і AC відповідно. Тоді $\Delta AKM_1 = \Delta AKN_1$, відтак $AM_1 = AN_1$. Крім того, $\angle M_1KN_1 = 60°$ і $KM_1 = KN_1$. Отже, ΔKM_1N_1 також є правильним. Випадок $N = N_1$, $M = M_1$ неможливий, бо інакше ми б мали $AM = AN$. Тож $KM_1 < KM$, звідки периметр ΔKM_1N_1 строго менший за периметр ΔKMN. Отже, барон Мюнхгаузен помиляється.

8–7. Кругла башта має 12 дверей, за кожною з яких схована скриня з золотом капітана Флінта. Ці двері розташовані по периметру башти на рівних відстанях між сусідніми, та занумеровані за рухом годинникової стрілки числами від 1 до 12. До башти підійшли 12 піратів, кожен з яких має один ключ, причому всі ключі занумеровані числами від 1 до 12. Відомо, що ключ з номером n відкриває двері з номером m тоді і тільки тоді, коли $m \vdots n$. Пірати стоять рівно по одному у кожної двері, але вони не знають номера двері, біля якої вони опинилися. Джим Хокінс знає у якого пірата який ключ і хоче, щоб ті змогли забрати якомога меншу кількість скринь з золотом. Джим може повернути башту так, щоб двері перед піратами були розташовані так, як він того бажає – але все одно номери дверей йдуть послідовно по колу за рухом годинникової стрілки$1-12$ починаючи з деякої. Яку максимальну кількість скринь із золотом зможуть напевно забрати пірати за таких умов?

(Богдан Рубльов)

<u>Відповідь</u>: 2.

<u>Розв'язання</u>. Очевидно, що ключ 1 відкриває будь-які двері. Покажемо, що Джим завжди зможе зробити так, щоб більше двох дверей не були відкриті. Розглянемо таблицю 12×12, де у 12 рядках записані усі можливі розстановки дверей (рис. 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1

<u>Рис. 2</u>

Припустимо, що ми розглядаємо деяке розташування ключів. Тоді кожному стовпчику буде відповідати певний ключ. Зафарбуємо сірим усі ті клітинки стовпчика, які відкриваються відповідним ключем. Наприклад, в стовпчику, де є ключ 2, будуть зафарбовані 6 клітин, де ключ 5 – 2 клітини і так далі. Загалом будуть зафарбовані

$$12+6+4+3+2+2+1+1+1+1+1+1=35 \text{ клітин.}$$

Оскільки рядків рівно 12, то за принципом Діріхле, знайдеться такий в якому не більше двох сірих клітин. Тоді Джим може повернути башту саме способом, що відповідає цьому рядку. У цьому випадку пірати відкриють максимум 2 двері.

Якщо пірати стануть з такими ключами, як то показане в останньому рядку на рис. 3, то завжди зможуть відкрити принаймні два замка.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
№ ключа	**2**	**4**	**7**	**12**	**1**	**6**						

<u>Рис. 3</u>

8–8. Обчислювальний агрегат працює за таким принципом:кожної нової хвилини за поданими йому на вхід цілими числами x_1, x_2, та x_3 у вказаному порядку він обчислює значення x_4, що задовольняє рівність: $x_1(x_4+x_2)=x_3(x_3+x_2)$. Якщо x_4

виявляється не цілим, то агрегат припиняє роботу. Якщо x_4 ціле, то на вхід подається нова трійка чисел $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$ та $x_3' = x_4$ і через хвилину агрегат обчислює x_4'. Якщо із самого початку задати $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$, то чи пропрацює агрегат без зупинок принаймні 2018 хвилин?

***Відповідь*:** так.

Розв'язання. Послідовність чисел, що буде обчислювати агрегат, позначимо через $x_4,\ x_5,\ x_6,\ \ldots$. Тоді для кожного натурального n справджується рівність:

$$x_{n-2}(x_{n+1} + x_{n-1}) = x_n(x_n + x_{n-1}).$$

Додамо до обох частин нерівності $x_n x_{n-2}$:

$$x_{n-2}(x_{n+1} + x_n + x_{n-1}) = x_n(x_n + x_{n-1} + x_{n-2}) \Rightarrow \frac{x_{n-2}(x_{n+1} + x_n + x_{n-1})}{x_n x_{n-1}} = \frac{x_n(x_n + x_{n-1} + x_{n-2})}{x_n x_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} + x_n + x_{n-1}}{x_n x_{n-1}} = \frac{x_n(x_n + x_{n-1} + x_{n-2})}{x_n x_{n-1} x_{n-2}} = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{x_{n-1} x_{n-2}}.$$

Ми отримали співвідношення, яке справджується для усіх натуральних n.Можемо його продовжити до початкових значень:

$$\frac{x_{n+1} + x_n + x_{n-1}}{x_n x_{n-1}} = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{x_{n-1} x_{n-2}} = \frac{x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}{x_{n-2} x_{n-3}} = \ldots = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_2 x_1} = 3 \Rightarrow$$

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = 3x_n x_{n-1} \Rightarrow x_{n+1} = 3x_n x_{n-1} - x_n - x_{n-1}.$$

Звідки остаточно $x_{n+1} \in \mathbb{Z}$ для усіх натуральних n.

9 клас

9–5. Для натурального числа n позначимо через $S(n)$ суму його цифр. Серед усіх пар натуральних чисел $(n,\ m)$, що задовольняють рівність $S(n) \cdot S(n+1) \cdot \ldots \cdot S(n+m) = 2018$, знайдіть таку, для якої сума $n + m$ приймає найменше можливе значення.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $(1\underbrace{99\ldots9}_{112},\ 1)$.

***Розв'язання*.** Спочатку зрозуміємо, що числа $S(n)$ та $S(n+1)$ мають такі співвідношення: $S(n+1) = S(n) + 1$, або $S(n) > S(n+1)$, причому остання нерівність не може справджуватися для двох чисел поспіль. Оскільки $2018 = 2018 \cdot 1 = 1009 \cdot 2 = 1009 \cdot 1 \cdot 2$, і інших розкладів на множники, що задовольняють умові, не існує, то зрозуміло, що можливі такі випадки:

- $m = 1,\ S(n) = 2018$ та $S(n+1) = 1$;
- $m = 1,\ S(n) = 1009$ та $S(n+1) = 2$;
- $m = 2,\ S(n) = 1009,\ S(n+1) = 1$ та $S(n+2) = 2$.

Якщо $S(n) = 2018$ та $S(n+1) = 1$, то це означає, що $n + 1 = 100\ldots0$, тобто $n = 99\ldots9$ і $S(n)$ має ділитися на 9 –суперечність, яка показує, що цей випадок неможливий.

Якщо $S(n) = 1009$ і $S(n+1) = 1$, то отримуємо суперечність аналогічну до попереднього випадку.

Якщо ж $S(n) = 1009$ і $S(n+1) = 2$, то $n + 1 = 100\ldots0100\ldots0$ або $n + 1 = 200\ldots0$. Тоді $n = 100\ldots0099\ldots9$ або $n = 199\ldots9$. Оскільки $1009 = 112 \cdot 9 + 1$, то ці варіанти можливі, і число n має містити наприкінці числа 112 цифр 9. Зрозуміло, що найменше значення для n це $n = 1\underbrace{99\ldots9}_{112}$.

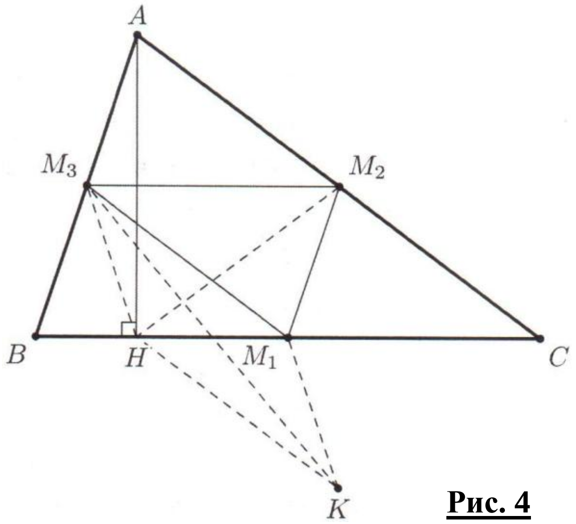

Рис. 4

9–6. В трикутнику ABC позначили точки M_1, M_2, M_3 – середини сторін BC, AC, AB відповідно. Точка K симетрична до M_2 відносно прямої BC, AH – висота трикутника ABC. Доведіть, що пряма KM_3 ділить навпіл відрізок HM_1.

(Данило Хілько)

***Розв'язання*.** З прямокутних трикутників ABH і ACH отримуємо, що $M_3H = \frac{1}{2}AB$, $M_2H = \frac{1}{2}AC$ (рис. 4). Також $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$, $M_1M_3 = \frac{1}{2}AC$ як середні лінії. З симетрії $M_2M_1 = M_1K$ і $M_2H = HK$. Відтак, $M_3H = M_1K$ і $M_3M_1 = HK$, отже чотирикутник HM_3M_1K – паралелограм, а тому пряма KM_3 ділить навпіл відрізок HM_1.

9–7. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$\tfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) \geq xyz + \tfrac{2}{9}(x+y+z)(x-z)^2.$$

(Леонід Бедратюк)

***Розв'язання*.** З відомої тотожності

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\cdot\tfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}.$$

З нерівності між середнім арифметичним та середнім квадратичним маємо, що

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq \tfrac{1}{3}(|x-y|+|y-z|+|z-x|)^2 \geq$$
$$\geq \tfrac{1}{3}(|x-y+y-z+x-z|)^2 = \tfrac{4}{3}(x-z)^2.$$

Звідси й випливає потрібна нерівність.

9–8. Кругла башта має 16 дверей, за кожною з яких схована скриня з золотом капітана Флінта. Ці двері розташовані по периметру башти на рівних відстанях між сусідніми, та занумеровані за рухом годинникової стрілки числами від 1 до 16. До башти підійшли 16 піратів, кожен з яких має один ключ, причому всі ключі занумеровані числами від 1 до 16. Відомо, що ключ з номером n відкриває двері з номером m тоді і тільки тоді, коли $m \vdots n$. Пірати стоять рівно по одному у кожної двері, але вони не знають номера двері, біля якої вони опинилися. Джим Хокінс знає у якого пірата який ключ і хоче, щоб ті змогли забрати якомога меншу кількість скринь з золотом. Джим може повернути башту так, щоб двері перед піратами були розташовані так,як він того бажає – але все одно номери дверей йдуть послідовно по колу за рухом годинникової стрілки $1-16$ починаючи з деякої. Яку максимальну кількість скринь із золотом зможуть напевно забрати пірати за таких умов?

(Богдан Рубльов)

***Відповідь*:** 3.

***Розв'язання*.** Очевидно, що ключ 1 відкриває будь-які двері. Покажемо, що Джим завжди зможе зробити так, щоб більше трьох дверей не були відкриті. Розглянемо таблицю 16×16, де у 16 рядках записані усі можливі розстановки дверей (рис. 5).

Припустимо, що ми розглядаємо деяке розташування ключів. Тоді кожному стовпчику буде відповідати певний ключ. Зафарбуємо сірим усі ті клітинки стовпчика, які відкриваються відповідним ключем. Наприклад, в стовпчику, де є ключ 2, будуть зафарбовані 8 клітин, де ключ 5 – 3 клітини і так далі. Загалом будуть зафарбовані

$$16+8+5+4+3+2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1=50 \text{ клітин.}$$

Оскільки рядків рівно 16, то за принципом Діріхле знайдеться такий, в якому не більше трьох сірих клітин. Тоді Джим може повернути башту саме способом, що відповідає цьому рядку. У цьому випадку пірати відкриють максимум 3 двері.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1

Рис. 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1
№ ключа	**2**	**4**	**12**	**8**	**3**	**6**	**1**	**16**	**14**	**9**	**7**		**5**		**15**	**11**

Рис. 6

Якщо пірати стануть з такими ключами, як то показане в останньому рядку на рис. 6, то завжди зможуть відкрити принаймні три замка.

10 клас

10–5. На острів насуває ескадра, в якій є 10 потужних есмінців, а також ще 20 невеликих катерів. Всі вони вишикувані по колу, причому відстані між сусідніми кораблями рівні, і саме так наближаються до острову. Острів захищають два торпедоносних катери, у кожного з яких є рівно по 10 торпед. Пускові установки в них налаштовані так, що перший може випустити одночасно усі 10 торпед по сусіднім 10 цілям, а другий усі 10 торпед по 10 цілям, що йдуть через одну. Відомо, що вони стріляють одночасно (тобто в деякі цілі можуть влучити одночасно дві торпеди). Яка найбільша кількість есмінців може напевно залишитися цілою, за будь-яких дій оборони острова?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 3 есмінці.

Розв'язання. Розглянемо усі можливі десятки сусідніх кораблів. Знайдуться такі 10 кораблів, серед яких не менше ніж 4 есмінці. Перший торпедоносець може вистрелити саме в ці 10 позицій. Серед інших 20 позицій, розглянемо ті, що розташовані на парних позиціях таті, що розташовані на непарних. Серед якихось з них буде не менше половини есмінців, що залишаться після пострілу першого торпедоносця. Саме по них може вистрелити другий торпедоносець. Таким чином, якщо пострілом першого торпедоносця нищаться $k \ge 4$ есмінців, то другим буде знищено не менше ніж $\frac{1}{2}(10-k)$. Таким чином, разом буде знищене есмінців $\frac{1}{2}(10-k)+k=5+\frac{1}{2}k \ge 7$.

Покажемо, що атакуючі можуть їх розмістити таким чином, щоб дійсно залишилися не менше 3 есмінців. Задля того, вони розставляють свої кораблі так, щоб кожний третій був есмінцем. Тоді перший торпедоносець знищить своїм пострілом не більше 4 есмінців. Якщо знищиться їх рівно 4, то пострілами через один не можна знищити більше 3, оскільки на парних та непарних позиціях їх однакова кількість. Якщо пострілом першого знищать 3 есмінці, то другого пострілу вистачить не більше, ніж на 4.

10–6. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Доведіть, що справджується нерівність: $c+ab \le 2$.

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Розглянемо задану рівність як квадратне рівняння відносно змінної c:

$$c^2+abc+(a^2+b^2-4)=0 \Rightarrow c=\tfrac{-ab\pm\sqrt{a^2b^2+16-4a^2-4b^2}}{2}.$$

Оскільки нас цікавлять лише додатні числа, то $c=\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+16-4a^2-4b^2}}{2}$. Тепер задана нерівність доводиться таким чином:

$$\tfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+16-4a^2-4b^2}}{2}+ab\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2+16-4a^2-4b^2}\le 4-ab \Leftrightarrow$$

$$a^2b^2+16-4a^2-4b^2 \le 16-8ab+a^2b^2 \Leftrightarrow 4a^2+4b^2 \ge 8ab \Leftrightarrow 4(a-b)^2 \ge 0.$$

Очевидно, що $ab \le 4$, бо інакше $a^2+b^2 \ge 2ab \ge 8$, що суперечить заданій в умові рівності.

10–7. Задані N натуральних чисел такі, що найбільші спільні дільники усіх непорожніх наборів цих чисел (по одному, два, три, тощо) попарно різні. Яка найменша кількість різних простих дільників може бути у добутку усіх N чисел?

(Олександр Голованов)

Відповідь: N.

Розв'язання. Приклад таких N чисел, у яких НСД усіх наборів різні, утворюють числа $a_k = p_k p_{k+1}^2 p_{k+2}^3 \dots p_{k+N-1}^N$, де p_1, p_2, …, p_N – деякі N різних простих чисел та $p_{N+i}=p_i$ $1 \le i \le N-1$. Дійсно, НСД сукупності деяких з цих чисел містить в першому степені рівно ті прості множники p_k, для яких a_k присутнє в наборі.

Доведемо, що менше N різних простих дільників не вистачить. Справді, нехай в добутку чисел a_1, a_2, …, a_N, що задовольняють умови, є лише $m < N$ різних простих дільники p_1, p_2, …, p_m. Для кожного p_i виберемо таке a_{k_i}, розклад якого на прості множники p_i міститься в найменшому степені, і розглянемо набір з усіх a_{k_i}, що взяті по одному разу (може виявитися, що $a_{k_i} = a_{k_j}$ при $i \neq j$); в цьому наборі буде не більше $m < N$ чисел. НСД усіх чисел цього набора містить кожне p_i в найменшому з тих степенів, в яких це просте число міститься в числах в числах a_1, a_2, …, a_N. Тому при додаванні до цього набору будь-якого a_i, що не міститься в ньому наборі НСД усіх чисел набору не зміниться. Одержана суперечність завершує доведення.

10–8. У трикутнику ABC пряма, що не співпадає зі сторонами трикутника та проходить через точку A, перетинає висоти BH_2 та CH_3 у точках D_1 та E_1 відповідно. Точки D_2 та E_2 симетричні точкам D_1 та E_1 відносно сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що кола, які описані навколо трикутників D_2AB та E_2AC, дотикаються.

(Плотников Михайло)

Розв'язання. Нехай E_3, D_3 – точки, що симетричні точкам E_1, D_1 відносно сторін AB і AC відповідно (рис. 7). Внаслідок симетрії відрізки $AE_1 = AE_2 = AE_3$, а CA – бісектриса кута, що утворений прямими CE_3 та CE_2. Тепер маємо, що

$$\angle(CE_3, E_3A) = \angle(E_1E_3, E_3A) = \angle(AE_1, E_1E_3) = \angle(AE_1, E_1C) = \angle(CE_2, E_2A).$$

Звідси точки A, E_2, E_3 та C лежать на одному колі. Аналогічно точки A, D_2, D_3 та B лежать на одному колі. Тому описане коло ΔABD_2 - це описане коло ΔAD_3D_2. Аналогічно описане коло ΔACE_2 - це описане коло ΔAE_3E_2. Оскільки прямі AE_3 та AD_2 симетричні одній прямій відносно AB, то точки A, E_3, D_2 належать одній прямій. Аналогічно точки A, E_2, D_3 належать одній прямій. Крім того $k = \frac{AD_2}{AE_3} = \frac{AD_1}{AE_1} = \frac{AD_3}{AE_2}$. Тому $\Delta AE_2E_3 \sim \Delta AD_3D_2$, та їх описані кола дотикаються, оскільки при гомотетії H_A^k одне описане коло переходить в інше і вони дотикаються в точці A.

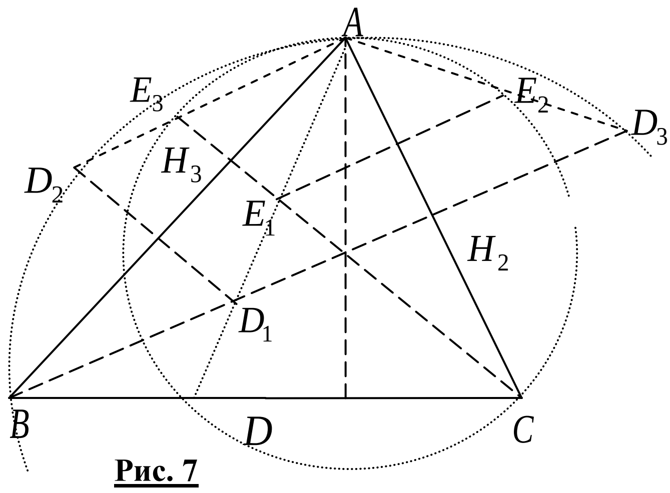

Рис. 7

11 клас

11–5. На острів насуває ескадра, в якій є 10 потужних есмінців, а також ще 20 невеликих катерів. Всі вони вишикувані в одну лінію, причому відстані між сусідніми кораблями рівні, і саме так наближаються до острову. Острів захищають два торпедоносних катери, у кожного з яких є рівно по 10 торпед. Пускові установки в них налаштовані так, що перший може випустити одночасно усі 10 торпед по сусіднім 10 цілям, а другий усі 10 торпед по 10 цілям, що йдуть через одну. Відомо, що вони стріляють одночасно (тобто в деякі цілі можуть влучити одночасно дві торпеди). Яка найбільша кількість есмінців може напевно залишитися цілою, за будь-яких дій оборони острова?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 3 есмінці.

***Розв'язання*.** Покажемо, що за цих умов ескадра може зберегти максимум 3 есмінці. Перенумеруємо зліва направо кораблі ескадри числами від 1 до 30. Якщо у кожній з груп $1-10$ чи $21-30$ не більше 2 есмінців, то у групі $11-20$ їх не менше 6, тому перший їх вражає, а далі другий добиває ще принаймні 1. Інакше перший торпедоносець вибирає ту з двох груп: $1-10$ чи $21-30$, де більше есмінців. І вражає по них. Далі другий стріляє по тій двадцятці, що лишилася: $11-30$ чи $1-20$, по парних чи непарних позиціях, де есмінців більше. Таким чином, якщо перший вражає k есмінців, $k \ge 3$, то другий з $10-k$, що лишилися вражає не менше ніж $\frac{1}{2}(10-k)$, а тому буде знищене есмінців $\frac{1}{2}(10-k)+k = 5+\frac{1}{2}k \ge 7$.

Покажемо, що атакуючи можуть розмістити кораблі таким чином, щоб дійсно залишилися не менше 3 есмінців. Розташуємо есмінці на позиціях $1, 2, 3$; $14, 15, 16, 17$ та $28, 29, 30$. Тоді перший торпедоносець може вразити максимум 4 цілі, якщо він зробить постріл в групу, що містить номери $14, 15, 16, 17$. Але тоді другий торпедоносець не може одночасно зачепити ліві та праві есмінці. Тоді він вразить щонайбільше 2 з них. Якщо перший вражає групу з 3 есмінцями, то другий може вразити не більше 4. Очевидно, що першому вражати групу з двох и менше есмінців не варто.

11–6. Послідовність (x_n) задається умовами $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n - \dfrac{1}{x_n}\right)$, $n \in N$. Доведіть, що існує a, для якого послідовність (x_n) містить рівно 2018 попарно різних членів. *(Якщо деякий член послідовності дорівнює 0, то послідовність на цьому елементі обривається.)*

(Гоголєв Андрій)

***Розв'язання*.** Позначимо $x_1 = a = ctg\alpha$, тоді

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(ctg\alpha - tg\alpha\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = ctg 2\alpha,$$

далі аналогічно легко знайти, що

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(x_n - \tfrac{1}{x_n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(ctg 2^{n-1}\alpha - tg 2^{n-1}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\cos^2 2^{n-1}\alpha - \sin^2 2^{n-1}\alpha}{\sin 2^{n-1}\alpha\cdot\cos 2^{n-1}\alpha} = ctg 2^n\alpha, \ \forall n \in N.$$

Умови задачі будуть виконані, якщо $x_i \ne 0$, $i = \overline{1, 2017}$, та $x_{2018} = 0$. Тепер достатньо вибрати α таким, щоб

$$x_{2018} = ctg(2^{2017}\alpha) = 0 \text{ або } 2^{2017} = \frac{\pi}{2}, \text{ тобто } \alpha = \frac{\pi}{2^{2018}}.$$

11–7. Задача 10–7.

11–8. Дано гострокутний трикутник ABC, AA_1 та CC_1 – його бісектриси, I – центр вписаного кола, M і N – середини відрізків AI та CI відповідно. Всередині трикутників AC_1I та A_1CI відповідно вибрали точки K і L так, що

$\angle AKI = \angle CLI = \angle AIC$, $\angle AKM = \angle ICA$, $\angle CLN = \angle IAC$. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників KIL та ABC рівні.

(Антон Тригуб)

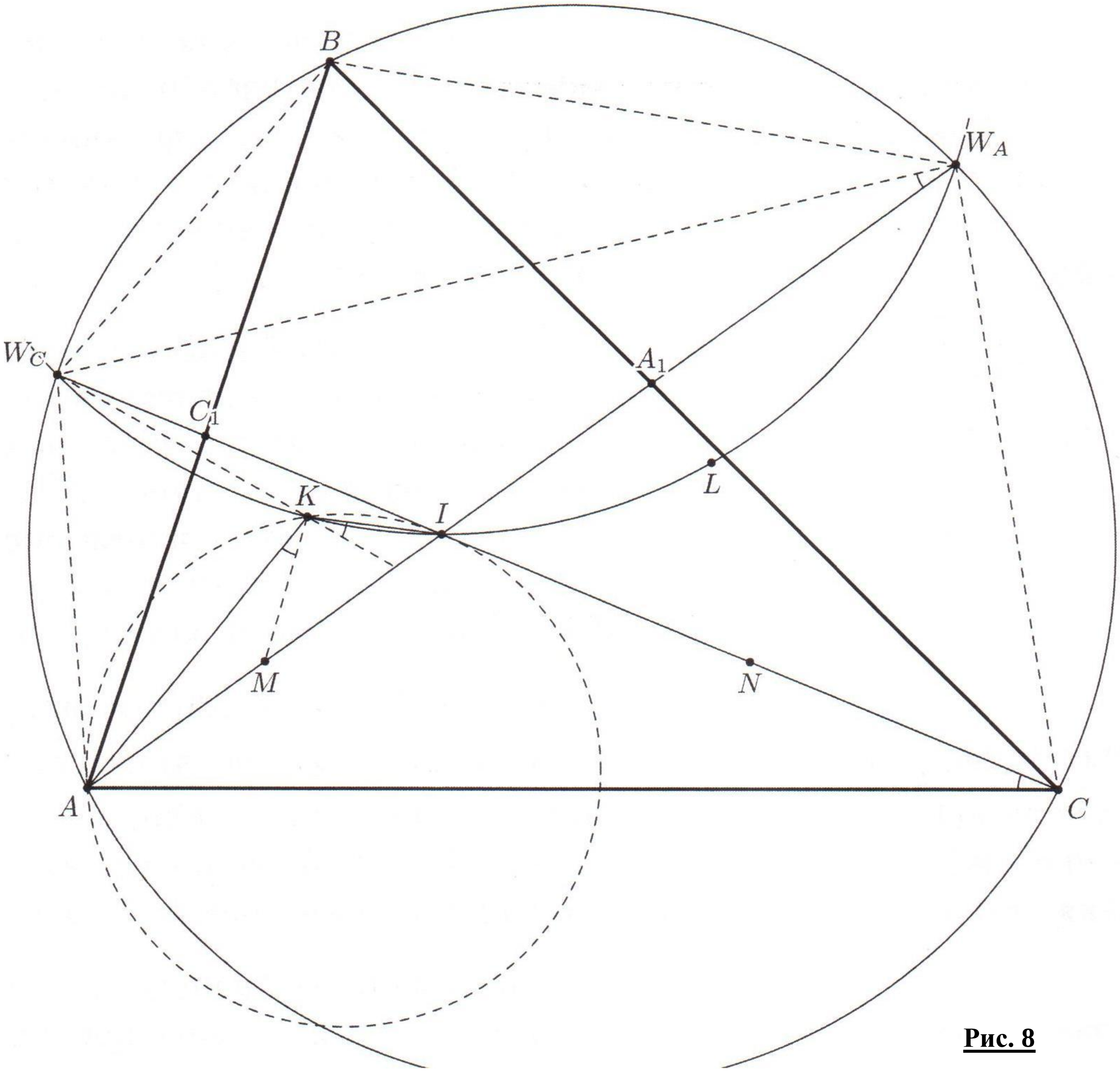

Рис. 8

Розв'язання. Нехай прямі AI та CI вдруге перетинають описане коло ΔABC в точках W_A і W_C (рис. 8). За умовою $\angle AKI = \angle AIC$, тож описане коло трикутника AKI дотикається до прямої $W_C I$. Розглянемо $AW_C I$. Згідно до теореми про тризуб, цей трикутник є рівнобедреним. Тоді описане коло ΔAKI також дотикається до $W_C A$. Звідси, пряма $W_C K$ містить симедіану ΔAKI. Отже, $\angle W_C KI = 180° - \angle ICA = 180° - \angle W_C W_A I$. Отже, точка K лежить на описаному колі трикутника $\Delta W_C W_A I$, аналогічно там лежить і L. Залишається помітити, що $\Delta W_C B W_A = \Delta W_C I W_A$ (за трьома сторонами), тому радіус описаного кола ΔKIL дорівнює радіусу описаного кола ΔABC.